

Fuzzy logic analysis of discrete time series

S.D Mikhalevski, S.M. Agayan

Institution of the Russian Academy of Sciences Geophysical center of RAS (CG RAS),
Moscow, Russia

E-mail: smikhalevski@gmail.com

Fuzzy comparison of numbers.

In many cases, regular linear measure of superiority of one number over another is too rough. So it is appropriate to normalize this measure. The normalized comparison of two numbers allows conjugating it with other comparisons using fuzzy logic operations.

Definition 1. Fuzzy comparison $n(a, b)$ of real numbers a and b measures the degree of superiority of a over b on a sign-alternating interval $[-1, 1]$:

$$n(a, b) = \text{mes}(a < b) \in [-1, 1].$$

From a formal point of view any function $f(a, b)$ on $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} [-1, 1]$ can be used as fuzzy comparison if it grows up as b and down as a with additional boundary conditions:

$$\forall a \lim_{b \rightarrow +\infty} f(a, b) = \pm 1 \text{ and } \forall b \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a, b) = \mp 1, \forall a: f(a, a) = 0.$$

Hereinafter we will use the so-called Minkowski comparisons $n_\nu(a, b) = \frac{b-a}{(a^\nu + b^\nu)^{1/\nu}}$ with $\nu \gg 0$.

These comparisons are defined only for nonnegative a and b . Thus further on $n(a, b)$ denotes any of $n_\nu(a, b)$.

Fuzzy comparison of numerical sequence with a number.

Let $A = \{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N\}$, $b > 0$ and $n(a, b)$ is a fuzzy comparison as defined above.

There are different versions of $n(A, b)$ and $n(b, A)$ which expand n to compare A with b and vice versa. In this work we used three different structures:

1. Binary structure:

$$\begin{cases} n(A, b) = \frac{\sum_i n(a_i, b)}{N} \in [-1, 1] \\ n(b, A) = \frac{\sum_i n(b, a_i)}{N} \in [-1, 1] \end{cases}$$

2. Gravitation-based structure ($\text{gr } A = \frac{\sum a_i}{N}$):

$$\begin{cases} n(A, b) = n(\text{gr } A, b) \in [-1, 1] \\ n(b, A) = n(b, \text{gr } A) \in [-1, 1] \end{cases}$$

3. σ -structure:

The argument for maximality of b over $\text{mod } A$ is the sum $\sigma^+(A, b) = \sum(b - a^+)$:

$$a^+ \in A \wedge a^+ < b.$$

The argument for minimality of b over $\text{mod } A$ is the sum of $\sigma^-(A, b) = \sum(a^- - b)$:

$$a^- \in A \wedge a^- > b.$$

So the measure of maximality of $b \text{ mod } A$ is the degree of maximality of $\sigma^+(A, b)$ over $\sigma^-(A, b)$ compared with n . The measure of minimality of b in $\text{mod } A$ is the degree of maximality of $\sigma^-(A, b)$ over $\sigma^+(A, b)$ compared with n .

$$n(A, b) = n(\sigma^-(A, b), \sigma^+(A, b))$$

$$n(b, A) = n(\sigma^+(A, b), \sigma^-(A, b))$$

It is naturally enough to assume that if a property is expressed in the $[-1, 1]$ scale, then hitting $[\frac{1}{2}, 1]$ ($[0, \frac{1}{2}]$) means it's extremely strong (extremely weak) manifestation. Similarly, hitting $[-1, -\frac{1}{2}]$ ($[-\frac{1}{2}, 0]$) interval means strong (weak) absence of such property.

Definition 2. Following described logic, let's call $\alpha \in \mathbb{R}$ from numerical sequence A :

1. Strong (weak) maximum, if $n(A, \alpha) \in [\frac{1}{2}, 1]$ ($[0, \frac{1}{2}]$).
2. Strong (weak) minimum, if $n(A, \alpha) \in [-1, -\frac{1}{2}]$ ($[-\frac{1}{2}, 0]$).

Functional extremality measures.

Let T is a finite set and f is a nonnegative function defined on T . Fuzzy comparison of $f(t)$ at any point $t \in T$ with full image $\text{Im}f = \{f(\bar{t}), \bar{t} \in T\}$ allows us to declare fuzzy abnormality measures $\text{mes max } f(t)$ and $\text{mes min } f(t)$. These measures characterize degree of maximality and minimality of the function f at the point t respectively:

$$\text{mes max } f(t) = n(\text{Im}f, f(t))$$

$$\text{mes min } f(t) = n(f(t), \text{Im}f)$$

Dynamic relief and dynamic extremality measures.

Let $T = \{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ is subset of nodes on a uniform two-dimensional grid from

$\mathbb{R}^2(x, y)$. Dynamic relief F on T is sequence of mappings $T \xrightarrow{f_k} \mathbb{R}^+$: $F = \{f_k\}_{k=1}^K$.

Conjunction on $k = 1 \dots K$ at any node t of $\text{mes max } f_k(t)$ measures allows to introduce integral measure of relief maximality:

$$\text{mes max } F(t) = \frac{\sum_{k=1}^K \text{mes max } f_k(t)}{K}$$

Quite similarly integral measure of relief minimality is defined on F in t node:

$$\text{mes min } F(t) = \frac{\sum_{k=1}^K \text{mes min } f_k(t)}{K}$$

Simulation of the dynamic relief.

This simulation test site was developed as part of the project and allows to model two-dimensional time series for the discrete time model. Let's introduce the concept of cycle k , as an element of discrete time. During this cycle model changes all of its properties not more than once.

Definition 3. γ – the frequency of system changes. This value allows to associate discrete time, which model operates, with absolute time: $\gamma \Delta \tau = \Delta k$ – number of cycles, that system lived through during time interval $\Delta \tau$. $K = \{k_i\}_{i=1}^Z$ – the set of cycles that model lived through, where Z – the absolute lifetime of the system.

The system creates dynamic relief F , that provides correlation between two-dimensional set of observed points $T_{m \times n}$ and field of intensities $f_k(t) \in [0, 1]$, that changes in time $k \in K$, $F = \{f_k\}$. Field of intensities $f_k(t)$ is determines as the sum $\Sigma_k(t) = \omega_0^k(t) + \omega_r^k(t) + \omega_s^k(t)$. $\omega_0^k(t)$ – the minimum intensity in the point $t \in T$, $\omega_r^k(t)$ – stochastic component of the intensity in t and $\omega_s^k(t)$ – induced intensity in t of the so-called singular points:

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in S \\ \mathcal{E}_k(t), & \text{if } \mathcal{E}_k(t) \in (0,1) \\ 0 & \leq 0 \end{cases}$$

Definition 4. $r = f_k(t)$ - function defined on $S \subset T$, called the perturbation of intensity, if the following conditions. It is called the perturbation of intensity, if the following conditions are realized:

1. $r(t) \in [0,1], \forall t \in S$.
2. $\lim_{t \rightarrow \partial S} r = 0$, on the boundary of definition region perturbation attenuates.
3. There is a unique point $t' \in S$, where the function that describes the perturbation, reaches the maximum value. Then t' will be called the epicenter of the disturbance.

$S = D(r)$ – the vicinity of the point t' , that is characterized by the following values w – the width, h – the height and α – the tilt angle. Currently, the model allows to simulate rectangular and elliptical vicinity.

The stochastic component of intensity.

$\forall t_i \in T \exists \omega_i^k$ is the stochastic component of the field of intensities, which is formed as the conjunction of $N_k \in [1, \infty)$ perturbation with random characteristics.

$\mathcal{R}_k = \{r_i\}_{i=1}^{N_k}$ is the multitude of all stochastic perturbations brought into system per cycle k . The intensity of each r_i is bounded from above by an adjustable parameter $\Delta \omega_i^k \in [0,1]$. Thus, if t'_i is the epicenter of r_i , then $r_i(t'_i) \leq \Delta \omega_i^k$.

Perturbation $r \in \mathcal{R}_k$ can be positively (r_i^+) or negatively (r_i^-) defined. If $r = r_i^+$ ($r = r_i^-$), then it increases (decreases) the intensity in the area that corresponds the prototype S .

There are N_k randomly defined disturbances born in every cycle $k \in K$. These disturbances overlap each other and form a changing picture. In this way this overlay imitate presence of "memory" in the modeled stochastic process.

The component of the induced intensity.

The singular point $q_{x,y}$ is the disturbance that exists during M cycles. Characteristics of this disturbance depend on time k . M is the lifetime of a singular point.

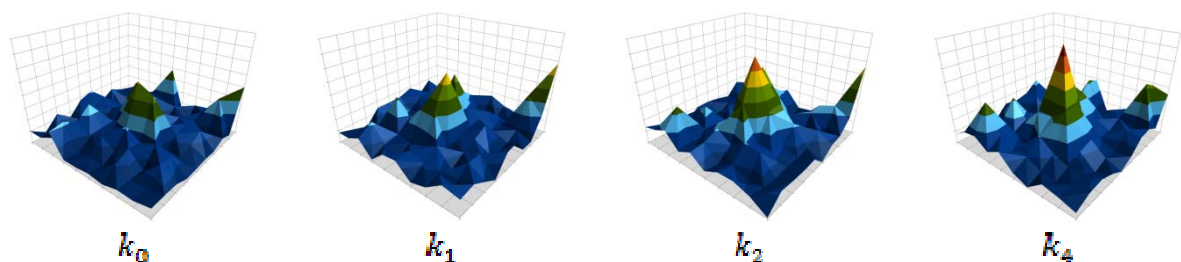


Figure 1. Demonstration of the polygon operation – a monotonic increase of a singular point during four cycles.

Conclusion

The essence of the work is the analysis of the dynamic relief $F = \{f_k(t), k = [1 \dots K]\}$, modeled by the polygon through measures of maximality ($\text{mes max } F(t)$) and minimality

($\text{mes min } F(t)$) that express in the vague way relevant extremality in the knot t of the relief F throughout its development.

Анализ временных рядов методами нечеткой логики

С.Д. Михалевский, С.М. Агаян

Учреждение Российской академии наук Геофизический центр РАН

E-mail: smikhalevski@gmail.com

Нечеткие сравнения чисел.

Во многих случаях обычная линейная мера превосходства одного числа над другим в виде их разности оказывается слишком грубой и целесообразно использование ее «нормировки». Нормированное представление сравнения двух чисел дает возможность сопрягать его при помощи операций нечеткой логики с другими такими сравнениями.

Определение 1. Нечеткое сравнение $n(a, b)$ на действительных числах a и b измеряет в знакопеременной шкале отрезка $[-1, 1]$ степень превосходства a над b :

$$n(a, b) = \text{mes}(a < b) \in [-1, 1].$$

С формальной точки зрения, роль нечеткого сравнения может играть любая функция $f(a, b)$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ возрастающая по b и убывающая по a с дополнительными граничными условиями: $\forall a \lim_{b \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \pm 1$ и $\forall b \lim_{a \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \mp 1$, $\forall a: f(a, a) = 0$.

В дальнейшем мы будем использовать, так называемое сравнение Минковского $n_v(a, b) = \frac{b-a}{(a^v+b^v)^{1/v}}$ с $v > 0$, определенные только для неотрицательных a и b . Таким образом ниже $n(a, b)$ обозначает какое-либо $n_v(a, b)$.

Нечеткое сравнение числовой совокупности с числом.

Пусть $A = \{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N\}$, $b > 0$ и $n(a, b)$ – определенное выше нечеткое сравнение. Существуют разные варианты $n(A, b)$ и $n(b, A)$ расширения n до сравнения A с b или b с A . В работе использовались три его конструкции:

1. Бинарная конструкция:

$$\begin{cases} n(A, b) = \frac{\sum_i n(a_i, b)}{N} \in [-1, 1] \\ n(b, A) = \frac{\sum_i n(b, a_i)}{N} \in [-1, 1] \end{cases}$$

2. Гравитационная конструкция, где $(\text{gr } A = \frac{\sum a_i}{N})$:

$$\begin{cases} n(A, b) = n(\text{gr } A, b) \in [-1, 1] \\ n(b, A) = n(b, \text{gr } A) \in [-1, 1] \end{cases}$$

3. σ -конструкция.

Доводом за максимальность b по $\text{mod } A$ будет сумма $\sigma^+(A, b) = \sum (b - a^+)$:
 $a^+ \in A \wedge a^+ < b$.

Доводом за минимальность b по A будет сумма $\sigma^-(A, b) = \sum (a^- - b)$:
 $a^- \in A \wedge a^- > b$.

Тогда мера максимальности b по $\text{mod } A$ есть степень преимущества $\sigma^+(A, b)$ над $\sigma^-(A, b)$ на основании сравнения n и мера минимальности b по $\text{mod } A$ есть степень преимущества $\sigma^-(A, b)$ над $\sigma^+(A, b)$ на основании сравнения n :

$$n(A, b) = n(\sigma^-(A, b), \sigma^+(A, b))$$

$$n(b, A) = n(\sigma^+(A, b), \sigma^-(A, b))$$

Совершенно естественно считать, что если некоторое свойство выражено в шкале $[-1, 1]$, то попадание в отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$ ($[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}]$) означает сильно экстремальное (слабо экстремальное) его проявление. Аналогично попадание в отрезок $[-1, -\frac{1}{2}]$ ($[-\frac{1}{2}, 0]$) означает сильное (слабое) отсутствие такого свойства.

Определение 2. Следуя этой логике, назовем число $a \in \mathbb{R}$ для числовой совокупности A :

1. Сильно (слабо) максимальным, если $(A, a) \in [\frac{1}{2}, 1]$ ($[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}]$).
2. Сильно (слабо) минимальным, если $n(A, a) \in [-1, -\frac{1}{2}]$ ($[-\frac{1}{2}, 0]$).

Функциональные меры экстремальности.

Пусть T – конечное множество и f – неотрицательная функция на нем. Нечеткое сравнение $f(t)$ в любой точке $t \in T$ со всем образом $\text{Im}f = \{f(\bar{t}), \bar{t} \in T\}$ функция f приводит к нечетким мерам аномальности $\text{mes max } f(t)$ и $\text{mes min } f(t)$, характеризующими соответственно степень максимальности и минимальности функции f в точке t :

$$\text{mes max } f(t) = n(\text{Inf}f, f(t))$$

$$\text{mes min } f(t) = n(f(t), \text{Im}f)$$

Динамический рельеф и динамические меры экстремальности.

Пусть $T = \{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ – подмножество узлов в равномерной двумерной сетке на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. Динамическим рельефом F на T будем считать последовательность отображений $T \xrightarrow{t_k} \mathbb{R}^+ : F = \{f_k\}_{k=1}^K$.

Соединение по всем $k = 1 \dots K$ в узле t мер максимальности $\text{mes max } f_k(t)$ дает возможность говорить об интегральной мере максимальности рельефа F в t на протяжении всего времени и приводит к динамической мере максимальности $\text{mes max } F(t)$:

$$\text{mes max } F(t) = \frac{\sum_{k=1}^K \text{mes max } f_k(t)}{K}$$

Совершенно аналогично определяется мера минимальности $\text{mes min } F(t)$ рельефа F в узле t :

$$\text{mes min } F(t) = \frac{\sum_{k=1}^K \text{mes min } f_k(t)}{K}$$

Моделирование динамического рельефа.

Разработанный, в рамках работы, имитационный полигон позволяет моделировать двумерные временные ряды для дискретной модели времени. Введем понятие такта k , как элемента дискретного времени в рамках которого модель изменяет все свои свойства не более одного раза.

Определение 3. γ – частота изменения системы. Данная величина позволяет связать дискретное время, которым оперирует модель, с временем абсолютным: $\gamma\Delta t = \Delta k$ – число тактов, прожитых системой за отрезок времени Δt . $K = \{k_i\}_{i=1}^Z$ – множество тактов прожитых моделью, где Z – абсолютное время жизни системы.

Система реализует построение динамического рельефа F , сопоставляющее двумерному множеству наблюдаемых точек $T_{m \times n}$ поле интенсивностей $f_k(t) \in [0,1]$, изменяющееся во времени $k \in K$, $F = \{f_k\}$. Рельеф интенсивности $f_k(t)$ определяется суммой $\Sigma_k(t) = \omega_0^k(t) + \omega_r^k(t) + \omega_s^k(t)$. $\omega_0^k(t)$ – минимальная интенсивность в точке $t \in T$, $\omega_r^k(t)$ – стохастическая компонента интенсивности в t и $\omega_s^k(t)$ – наведенная интенсивность в t от, так называемых, особых точек:

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Sigma_k(t) \geq 1 \\ \Sigma_k(t) & \text{if } \Sigma_k(t) \in (0,1) \\ 0 & \text{if } \Sigma_k(t) \leq 0 \end{cases}$$

Определение 4. $r = f_k(t)$ – функция, определенная на $S \subset T$, называется возмущением интенсивности, если выполнены следующие условия:

1. $r(t) \in [0,1], \forall t \in S$.
2. $\lim_{t \rightarrow \partial S} r = 0$, на границе области определения возмущение затухает.
3. Существует единственная точка $t' \in S$, где функция описывающая возмущение имеет максимальное значение. Далее t' будем называть эпицентром возмущения.

$S = D(r)$ – окрестность точки t' , характеризуемая следующими величинами w – ширина, h – высота и α – угол наклона. В настоящее время система позволяет моделировать прямоугольную или эллиптическую окрестности.

Стохастическая компонента интенсивности.

$\forall t_i \in T \exists \omega_{r_i}^k$ – стохастическая компонента поля интенсивностей, которая формируется, как конъюнкция из $N_k \in [1, \infty)$ возмущений со случайными характеристиками.

$\mathcal{R}_k = \{r_i\}_{i=1}^{N_k}$ – множество всех стохастических возмущений привнесенных в систему за такт k . Интенсивность каждого r_i ограничена сверху, регулируемым параметром $\Delta\omega_r^k \in [0,1]$. Таким образом, если t'_i – эпицентр r_i , то $r_i(t'_i) \leq \Delta\omega_r^k$.

Возмущение $r \in \mathcal{R}_k$ может быть положительно (r_i^+) и отрицательно (r_i^-) определенным. Если $r = r_i^+$ ($r = r_i^-$), то он увеличивает (уменьшает) интенсивность в области соответствующей прообразу S .

В каждом такте $k \in K$ рождается N_k случайно определенных возмущений, которые накладываются друг на друга и образуют изменяющуюся картину. Таким образом наложения имитируя наличие «памяти» в моделируемом стохастическом процессе.

Компонента наведенной интенсивности.

Особая точка $q_{x^*y^*}$ – возмущение существующее на протяжении из M тактов, характеристики которого зависят от времени k . M – время жизни особой точки.

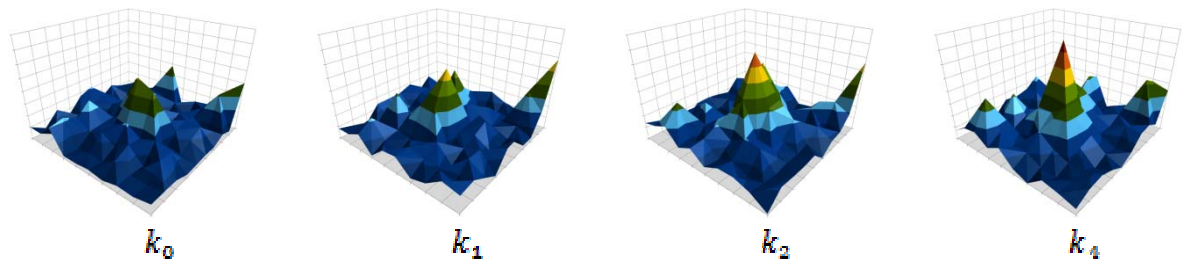


Рисунок 1. Демонстрация работы полигона – монотонное возрастание особой точки на протяжении четырех тактов .

Выводы

Сутью работы является анализ динамического рельефа $F = \{f_k(\xi), k = [1 \dots K]\}$, смоделированного с использованием полигона, через меры максимальности ($\text{mes max } F(\xi)$) и минимальности ($\text{mes min } F(\xi)$) выражающие нечетким способом соответствующую экстремальность в узле ξ рельефа F на всем протяжении его развития.